28/11/2017

Θεώρημα (SUPER-SOS) [Μαζί με τα 1 $\bar{f}$: διαφ =>

$$\begin{cases} \bar{f} \text{ συνεχής} \\ \bar{f} \text{ μερικώς διαφορίσιμη} \end{cases}$$

(2) $\bar{f}$ συνεχώς διαφορίσιμη (δηλ. όλες οι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ είναι συνεχείς) $\Longrightarrow$ $\bar{f}$ διαφ.]

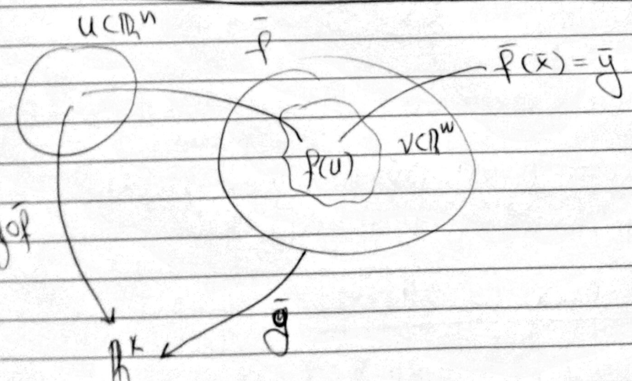
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά

$\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ με $\bar{f}(U) \subset V$, $\bar{g}: V \to \mathbb{R}^k$

$\bar{f}$: διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, $\bar{g}$ διαφορίσιμη στο $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$

$\Longrightarrow$ $\bar{g} \circ \bar{f}$ $U \to \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

και $\boxed{D(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}) = D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))\, D\bar{f}(\bar{x})}$ **



$(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$

$D(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x})$: πίνακας $k \times n$

$D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$: πίνακας $k \times m$

$D\bar{f}(\bar{x})$: πίνακας $m \times n$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $A = D\bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$B = \underbrace{D\bar{g}(\bar{y})}_{\in \mathbb{R}^{k\times m}} = D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$$

Θ.ν.δ.ο. $\lim_{\bar{\eta}\to 0} \dfrac{(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}+\bar{\eta}) - (\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}) - B\cdot A\cdot\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$

[Τεχνική προϋπόθεση (θέλω όταν ανεξάρτητη μεταβλητή ορίζω να είναι στα πεδία ορισμού των $\bar{f}$ και $\bar{g}$)

V ανοικτό $\Longrightarrow \exists\, B(\bar{y},\delta_1) \subset V$

U ανοικτό και $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$ $\exists\, B(\bar{x},\delta_2) \subset U$

και $f(B(\bar{x},\delta_2)) \subset B(\bar{y},\delta_1)$

Έστω $\underbrace{\bar{\eta} \in B(\bar{0},\delta_2)\setminus\{\bar{0}\}}$ $\in \mathbb{R}^n$ και $\bar{\xi} \in B(\bar{0},\delta_1)\setminus\{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^m$]

$\Longleftrightarrow \bar{x}+\bar{\eta} \in B(\bar{x},\delta_2)\setminus\{\bar{x}\}$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{\bar{\eta}\to 0} \dfrac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{\eta}) - \bar{f}(\bar{x}) - A\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$

$$\lim_{\bar{\xi}\to \bar{0}} \frac{\bar{g}(\bar{y}+\bar{\xi}) - \bar{g}(\bar{y}) - B\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0}$$

<u>Ισοδύναμα</u>: $\bar{f}(\bar{x}+\bar{\eta}) = \bar{f}(\bar{x}) + A\bar{\eta} + \bar{\varphi}(\bar{\eta})$ με

$$\lim_{\bar{\eta}\to 0} \frac{\bar{\varphi}(\bar{\eta})}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$$

$\bar{g}(\bar{y}+\bar{\xi}) = \bar{g}(\bar{y}) + B\bar{\xi} + \bar{\psi}(\bar{\xi})$ με

$$\lim_{\bar{\xi}\to 0} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi})}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0}$$

Συνεπώς, $(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}+\bar{\eta}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}+\bar{\eta})) =$

$$\bar{g}(\underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{=\bar{y}} + \underbrace{A\bar{\eta} + \bar{\varphi}(\bar{\eta})}_{=\bar{\xi}}) = \underbrace{\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))}_{\bar{g}\circ\bar{f}(\bar{x})} + BA\bar{\eta} + B\cdot\bar{\varphi}(\bar{\eta}) +$$

$$\bar{\psi}(A\bar{\eta} + \bar{\varphi}(\bar{\eta}))$$

Δηλαδή ισοδύναμα πρέπει και αρκεί

$$\lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} \frac{B\bar{\varphi}(\bar{\eta}) + \bar{\psi}(A\bar{\eta} + \bar{\varphi}(\bar{\eta}))}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$$

όπου $\lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} B\,\frac{\bar{\varphi}(\bar{\eta})}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$

$\lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} \frac{\bar{\varphi}(\bar{\eta})}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0} \implies \exists\ 0<\delta_3<\delta_2$

$\forall\ \bar{\eta}\in B(\bar{0},\delta_3)\setminus\{\bar{0}\}$
$\|\bar{\varphi}(\bar{\eta})\| \leq \|\bar{\eta}\|$

$\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi})}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0} \iff \bar{\psi}(\bar{\xi}) = \|\bar{\xi}\|\,\bar{\psi}_1(\bar{\xi})$ με

$\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \psi_1(\bar{\xi}) = \bar{0}$

Μένει ν.δ.ο. $\lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} \frac{\bar{\psi}(A\bar{\eta}+\bar{\varphi}(\bar{\eta}))}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$:

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta_3>0\ \ \forall\ \|\bar{\eta}\|<\delta_3\quad \frac{\|\bar{\psi}(\bar{\eta})\|}{\|\bar{\eta}\|} < \varepsilon$

$$= \frac{\|\overbrace{A\bar{\eta}+\bar{\varphi}(\bar{\eta})}^{=\bar{\xi}}\|\cdot\|\bar{\psi}_1(A\bar{\eta}+\bar{\varphi}(\bar{\eta}))\|}{\|\bar{\eta}\|} \leq (\|A\|+1)\,\|\bar{\psi}_1(A\bar{\eta}+\bar{\varphi}(\bar{\eta}))\|$$

Άσκηση → $\|A\bar{\eta}\| \le \|A\|\cdot\|\bar{\eta}\|$ όπου (αν. C-S) $\|(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\|^2 =$

$$\sum_{i=1,j=1}^{m,n} a_{ij}^2$$ και $\bar{\varphi}(\bar{\eta}) \le \|\bar{\eta}\|$

με $\lim_{\eta\to 0}\|\bar{\psi}_1(A\bar{\eta}+\varphi(\bar{\eta}))\| = 0$

αφού $\lim_{\eta\to 0} A\bar{\eta} = \bar{0}$ και $\lim_{\eta\to 0}\bar{\varphi}(\bar{\eta}) = \bar{0}$

(με σύνθεση ορίων)

(*) Έστω (1) $\lim_{\eta\to \bar{a}} \bar{f}(\bar{\eta}) = \bar{l}$ και (2) $\lim_{\bar{\xi}\to b}\bar{g}(\bar{\xi}) = \bar{a}$

$\Longrightarrow \lim_{\bar{\xi}\to b}(\bar{f}\circ\bar{g})(\bar{\xi}) = \bar{l}$

Πράγματι $\bar{\xi}_\nu \to \bar{b} \xrightarrow{(2)} \bar{g}(\bar{\xi}_\nu) \to \bar{a} \xrightarrow{(1)}$

$\bar{f}(\bar{g}(\bar{\xi}_\nu)) \to \bar{l}$

③ $\bar{f}$ διαφ. στο $\bar{x}$, $\bar{g}$ διαφ. στο $\bar{f}(\bar{x})$ $\Longrightarrow$

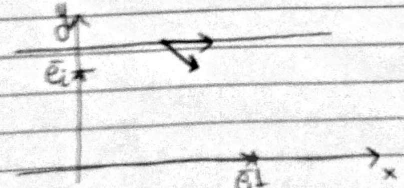
$\bar{g}\circ\bar{f}$ διαφ. στο $\bar{x}$ με $D(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}) = D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))D\bar{f}(\bar{x})$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Υπενθύμιση: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f(\bar{x})}{h} = 0 \in \mathbb{R}$

$\forall i=1,\dots,n$ $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$\bar{e}_\nu$ = οι κατευθύνσεις των αξόνων.



δηλ. η παράγωγος της $f|\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n\ \bar{y}=\bar{x}+h\bar{e}_i,\ h\in\mathbb{R}\} = E$

Παράγωγος της $f: U \to \mathbb{R}$ στο $\bar{x} \in U \in \mathbb{R}^n$ στην κατεύθυνση $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ $\|\bar{v}\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}$$

Πρόταση : Έστω η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ $\Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$

Απόδειξη

(Εφαρμογή κανόνα αλυσίδας)(= Θεώρημα 3)

Η $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x})$ είναι η παράγωγος της f περιορισμένης

στην ευθεία $\{\bar{y} = \bar{x} + h\bar{v} : h \in \mathbb{R}\}$ (περνάει από $\bar{x}$ και έχει κατεύθυνση $\bar{v}$)

δηλ. αν $\underbrace{\text{παραμετρικοποιήσουμε το σύνολο αυτό}}$

ως $\bar{\varphi}(h) := \bar{x} + h\bar{v}$, $h \in \mathbb{R}$

$$\{\bar{y} + h\bar{v} : h \in \mathbb{R}\} = \bar{\varphi}(\mathbb{R})$$

έχουμε (από τον ορισμό της παρ. κ.κ.)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ \bar{\varphi})(h) - (f \circ \bar{\varphi})(0)}{h} \left[= (f \circ \bar{\varphi})'(0) \right]$$

και έχουμε $(f \circ \bar{\varphi})'(0) = D(f \circ \bar{\varphi})(0) = \underbrace{Df(\bar{\varphi}(0))}_{= \nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}} \cdot D\bar{\varphi}(0)$

$\bar{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\bar{\varphi}(h)}_{= \begin{pmatrix} \varphi_1(h) \\ \vdots \\ \varphi_n(h) \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= \bar{x}} + h \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= \bar{v}}$$

$$\Longrightarrow J\bar{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(h) \\ \vdots \\ \varphi_n'(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \bar{v} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

όπου $\lim_{\bar h\to\bar 0} \frac{\bar\varphi(\bar h) - \bar\varphi(\bar 0) - J\bar\varphi(\bar 0)\bar h}{\|\bar h\|} =$

(εδώ) $= \lim_{h\to 0}\frac{\bar\varphi(h)-\bar\varphi(0)-J\bar\varphi(0)h}{|h|} =$

$$\lim_{h\to0}\frac{\bar x + h\bar v - \bar x - h\bar v}{|h|} \underset{(h\neq 0)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\bar 0}{h} = \bar 0$$

$$J\bar\varphi(0) = D\bar\varphi(0)$$

<u>Παρατήρηση</u> Από ανισότητα Cauchy-Schwarz

έχουμε ότι $\left|\frac{\partial f(\bar x)}{\partial \bar v}\right| \underset{CS}{\leq} \|grad f(\bar x)\|\cdot\underbrace{\|\bar v\|}_{=1}$

και όπου $\bar v = \frac{grad f(\bar x)}{\|grad f(\bar x)\|}$ $\frac{\partial f(\bar x)}{\partial\bar v} = \|grad f(\bar x)\|$

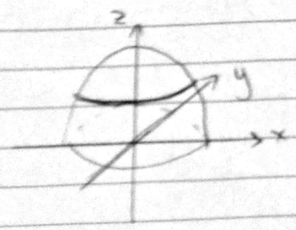
<u>Άρα</u>: Στο σημείο $\bar x$ η f παρουσιάζει τον μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής (τότε το $\frac{\partial f}{\partial\bar v}(\bar x)$ παίρνει την μεγαλύτερη τιμή) στην κατεύθυνση $\bar v = \frac{grad f(\bar x)}{\|grad f(\bar x)\|}$

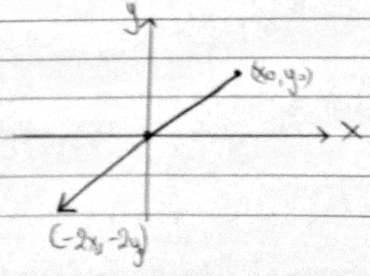
[σε ένα βουνό αυτή η κατεύθυνση έχει την πιο απότομη ανάβαση (και το νερό κατεβαίνει σε αυτήν την κατεύθυνση)]

Παράδειγμα $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (-2x,-2y)$

Έστω στον χάρτη (του δισδιάστατου) ότι είμαστε στο σημείο (x_0,y_0)...





Τότε στην κατεύθυνση $\bar{v} = -\frac{(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$ έχουμε την μεγαλύτερη κλίση του βουνού $= 2\|(x_0,y_0)\|$